Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität • gegründet 1825

Institut für Technische Mechanik
Prof. Dr.-Ing. C. Proppe
Prof. Dr.-Ing. W. Seemann

Name: Vorname: Matr. Nr.:	Testat:	Termin: (jew. 19:00 Uhr) **Di., 25.11.2008**

Technische Mechanik III
Übungsblatt Nr. 3

Thema: **Newtonsches Grundgesetz - Prinzip von d'Alembert. Herleitung der Bewegungsgleichungen für Massenpunkte.**

Formelsammlung:

a) Newtonsches Grundgesetz: $\boxed{\underset{\sim}{F}_{ges} = m\underset{\sim}{a}}$ mit $\begin{cases} m = \text{Masse} \\ \underset{\sim}{a} = \text{Absolut-Beschleunigung} \end{cases}$

$$\underset{\sim}{F}_{ges} = \sum(\text{eingeprägte Kräfte}) + \sum(\text{Zwangskräfte})$$
$$= \underset{\sim}{F} + \underset{\sim}{Z}$$

Beispiele:

Eingeprägte Kräfte	Zwangskräfte
Schwerkraft $G = mg$, Kraft mit vorgegebenem Verlauf $P(t)$, $P(x), \ldots$ Gleitreibungskraft R, Seilkraft S, Federkraft $F_f = cx$ (lineare Feder), Dämpferkraft $F_d = k\dot{x}$ (viskose Dämpfung), usw.	Normalkraft N, Lagerkraft $A, B, \ldots$ Haftkräfte $R_0, \ldots$

b) Prinzip von d'Alembert: $\boxed{\underset{\sim}{F} + \underset{\sim}{Z} + \underset{\sim}{T} = 0}$ (Kräftegleichgewicht)

aus dem Newtonschen Grundgesetz mit der Aufteilung

$\underset{\sim}{F}_{ges} = \underset{\sim}{F} + \underset{\sim}{Z} = \sum(\text{eingeprägte Kräfte}) + \sum(\text{Zwangskräfte})$

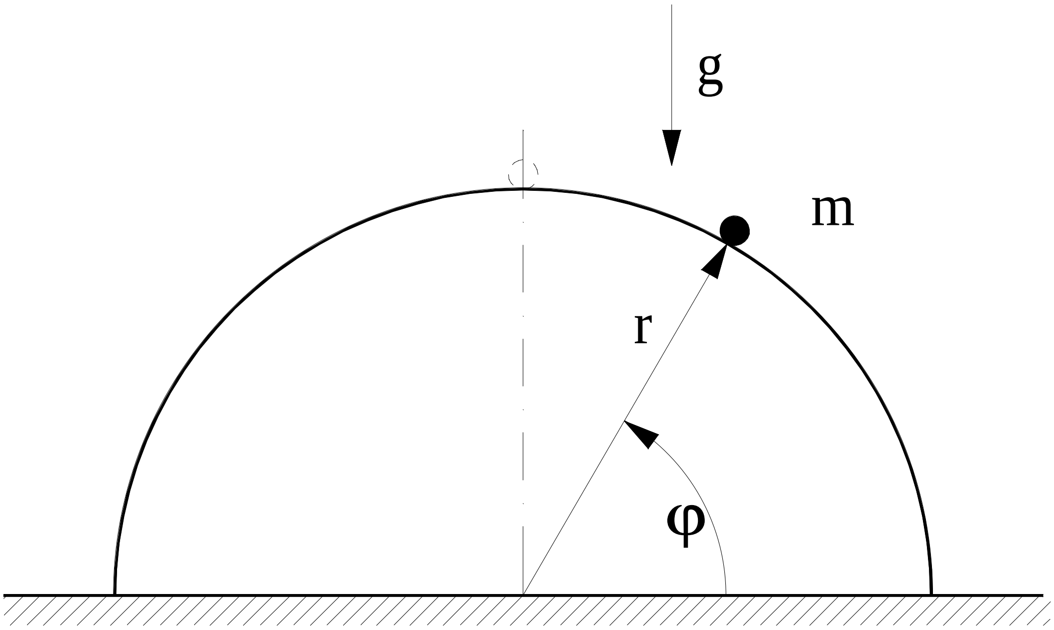
und der d'Alembertschen Trägheitskraft $\boxed{\underset{\sim}{T} = -m\underset{\sim}{a}}$

c) Herleitung der Bewegungsgleichungen:

Newtonsches Grundgesetz	Prinzip von d'Alembert
1. Positive Lagekoordinate wählen (positive Beschleunigungs- und Kraftrichtung damit festgelegt).	
1a. Beschleunigungsvektor $\underset{\sim}{a}$ formal angeben	
2. Freischneiden jedes einzelnen Massenpunktes und Anbringen aller eingeprägten Kräfte $\underset{\sim}{F}$ und Zwangskräfte $\underset{\sim}{Z}$.	
	2a. Zusätzlich d'Alembertsche Trägheitskraft $\underset{\sim}{T}$ entgegen den durch die Wahl des Koordinatensystems positiv definierten Beschleunigungsrichtungen einzeichnen.
3. Kraftvektor $\underset{\sim}{F}_{ges} = \underset{\sim}{F} + \underset{\sim}{Z}$ angeben	
4. Kraftvektor $\underset{\sim}{F}_{ges}$ und Beschleunigungsvektor $\underset{\sim}{a}$ in $\boxed{\underset{\sim}{F}_{ges} = m\underset{\sim}{a}}$ einsetzen und (skalar) auswerten.	Gleichgewicht der Kräfte $\boxed{\underset{\sim}{F} + \underset{\sim}{Z} + \underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{0}}$ aus Skizze.

Aufgabe 2 – 2

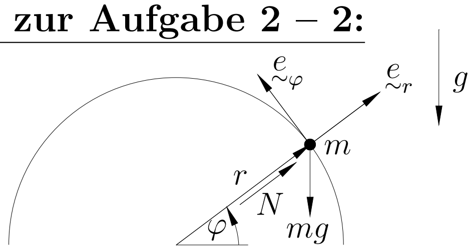
— Beispiel —



Nach einer kleinen Störung rutscht ein Massenpunkt m unter dem Einfluss der Schwerkraft ohne Anfangsgeschwindigkeit reibungsfrei vom Scheitel einer Halbkugel herab.

1. In allgemeiner Lage φ wende man das Grundgesetz der Mechanik in Polarkoordinaten an.
2. Man bestimme die Funktion $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}(\varphi)$ unter Beachtung der Anfangsbedingungen.
3. An welcher Stelle φ_0 löst sich der Massenpunkt von der Halbkugel?

Lösung zur Aufgabe 2 – 2:



1. Newtonsches Grundgesetz:

$$\underset{\sim}{F} = m\underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{F}_r + \underset{\sim}{F}_\varphi = m\underset{\sim}{g} + \underset{\sim}{N}$$

$$\underline{\underline{\underset{\sim}{F}_r = ma_r\underset{\sim}{e}_r = N\underset{\sim}{e}_r - mg\sin\varphi\underset{\sim}{e}_r}} \qquad (1) \quad \Rightarrow \quad ma_r = N - mg\sin\varphi$$

$$\underline{\underline{\underset{\sim}{F}_\varphi = ma_\varphi\underset{\sim}{e}_\varphi = -mg\cos\varphi\underset{\sim}{e}_\varphi}} \qquad (2) \quad \Rightarrow \quad ma_\varphi = -mg\cos\varphi$$

2. $\dot\varphi(\varphi)$ durch Integration:

$$\text{aus } (2) : -mg\cos\varphi = ma_\varphi = m(r\ddot\varphi + 2\dot r\dot\varphi)$$

$$\dot r = 0\,! \quad \ddot\varphi = \frac{d\dot\varphi}{dt} = \frac{d\dot\varphi}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\dot\varphi}{d\varphi}\dot\varphi\,!$$

$$\hookrightarrow \quad -g\cos\varphi = r\dot\varphi\frac{d\dot\varphi}{d\varphi}$$

$$-g\cos\varphi d\varphi = r\dot\varphi d\dot\varphi$$

$$\text{Integration:} \quad -g\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi}\cos\varphi d\varphi = r\int_{\dot\varphi(\frac{\pi}{2})}^{\dot\varphi}\dot\varphi d\dot\varphi$$

$$-g\sin\varphi\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} = r\frac{\dot\varphi^2}{2}\Big|_{\dot\varphi(\frac{\pi}{2})}^{\dot\varphi} \quad ; \quad \dot\varphi(\frac{\pi}{2}) = 0;$$

$$\hookrightarrow \quad g(1-\sin\varphi) = \frac{r}{2}\dot\varphi^2$$

$$\underline{\underline{\dot\varphi^2 = \frac{2g}{r}(1-\sin\varphi)}}$$

3. Lösen bei $N = 0$:

$$\hookrightarrow \quad \text{aus}(1) \; : \; ma_r = -mg\sin\varphi_0$$

$$-g\sin\varphi_0 = a_r = \ddot r - r\cdot\dot\varphi_0^2 \quad ; \quad \ddot r = 0\,!$$

$$\dot\varphi_0^2 = \frac{2g}{r}(1-\sin\varphi_0)$$

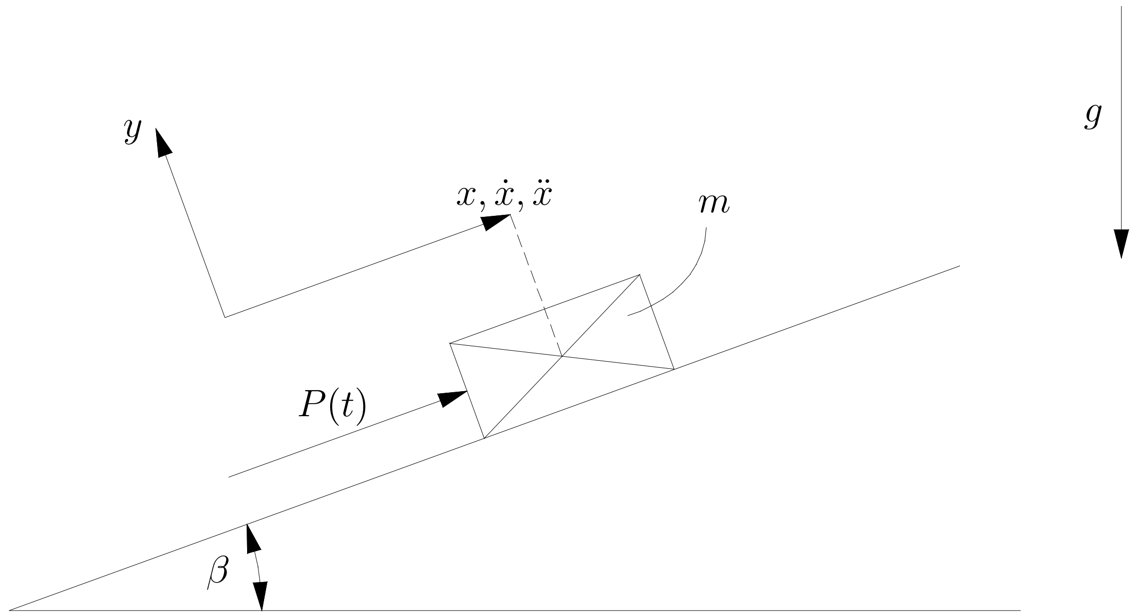
$$\hookrightarrow \quad -g\sin\varphi_0 = -r\frac{2g}{r}(1-\sin\varphi_0)$$

$$\sin\varphi_0 = \frac{2}{3}$$

$$\hookrightarrow \quad \underline{\underline{\varphi_0 = 41{,}8^\circ}}$$

Aufgabe 2 – 14

— Beispiel —



Ein Klotz der Masse m wird durch eine Kraft $P(t) = 2mg\,(1 - ct^2)$ eine schiefe Ebene mit dem Steigungswinkel β hinaufgedrückt. Der Reibungskoeffizient zwischen Klotz und schiefer Ebene habe für Haft- und Gleitreibung denselben Wert μ.

1. Mittels des d'Alembertschen Prinzips ermittle man die Bewegungsgleichung der Masse.

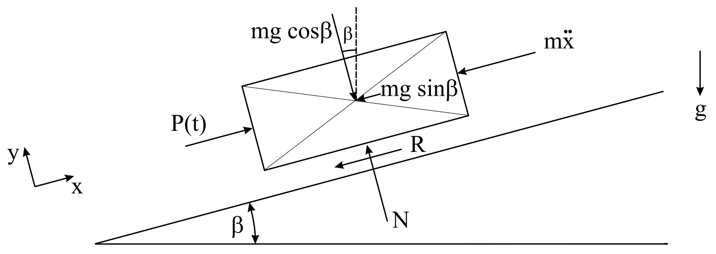
2. Man berechne $\dot{x}(t)$ und $x(t)$ für die Anfangsbedingungen $\dot{x}(t=0) = x(t=0) = 0$.

3. Man bestimme den Wert c so, dass die Kraft P nach der Zeit $t = t_1$ Null wird. Wo befindet sich der Klotz zum Zeitpunkt $t = t_1$?

Lösung zur Aufgabe 2 – 14:

1. Prinzip von d'Alembert:

$$\underline{\underline{\underset{\sim}{F} + \underset{\sim}{Z} + \underset{\sim}{T} = 0}}$$



$$\begin{pmatrix} P(t) - mg\sin\beta - R \\ -mg\cos\beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -m\ddot{x} \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Coulombsche Reibung:

$R = \mu N$ mit (2): $R = \mu\, mg\, \cos\beta$,

mit (1): $m\ddot{x} + mg\sin\beta + R - P(t) = 0$ mit $P(t) = 2mg(1 - ct^2)$

$$\hookrightarrow \quad m\ddot{x} + mg(\sin\beta + \mu\cos\beta) = 2mg(1 - ct^2)$$

$$\underline{\underline{\ddot{x}(t) = g(2 - 2ct^2 - \sin\beta - \mu\cos\beta)}}$$

2. Integration:

$$\dot{x}(t) = g\Big[(2 - \sin\beta - \mu\cos\beta)t - \frac{2}{3}ct^3\Big] + C_1$$

$$x(t) = g\Big[(2 - \sin\beta - \mu\cos\beta)\frac{t^2}{2} - \frac{c}{6}t^4\Big] + C_1 t + C_2$$

mit AB: $\dot{x}(t=0) = x(t=0) = 0 \quad \rightarrow \quad C_1 = C_2 = 0$

damit
$$\left\| \begin{aligned} \dot{x}(t) &= g\Big[(2 - \sin\beta - \mu\cos\beta)t - \frac{2}{3}ct^3\Big] \\ x(t) &= g\Big[(2 - \sin\beta - \mu\cos\beta)\frac{t^2}{2} - \frac{c}{6}t^4\Big] \end{aligned} \right\|$$

3.

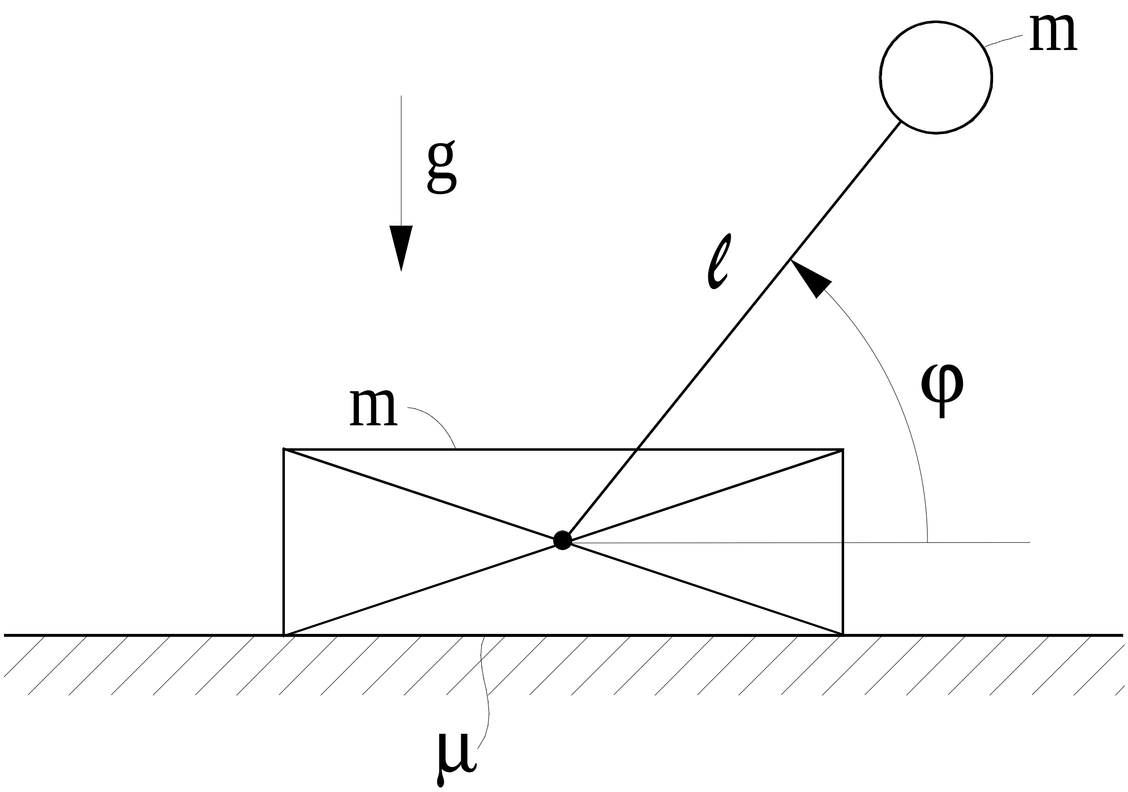
Bedingung: $P(t_1) = 2mg(1 - ct_1^2) \stackrel{!}{=} 0$

$$\hookrightarrow \quad \underline{\underline{c = \frac{1}{t_1^2}}} \quad \text{da} \quad mg \neq 0$$

Einsetzen! $\underline{\underline{x(t_1) = \frac{g}{6}\left[5 - 3\left(\sin\beta + \mu\cos\beta\right)\right] t^2}}$

Aufgabe 2 – 12b

— zu bearbeiten —



Ein masseloser Stab der Länge ℓ ist an seinen Enden gelenkig mit zwei Massenpunkten m verbunden, von denen einer auf horizontaler Unterlage reibend gleiten kann. Der Stab wird in die lotrechte Ruhelage gebracht und setzt sich von dort aus durch eine kleine Störung in Bewegung.

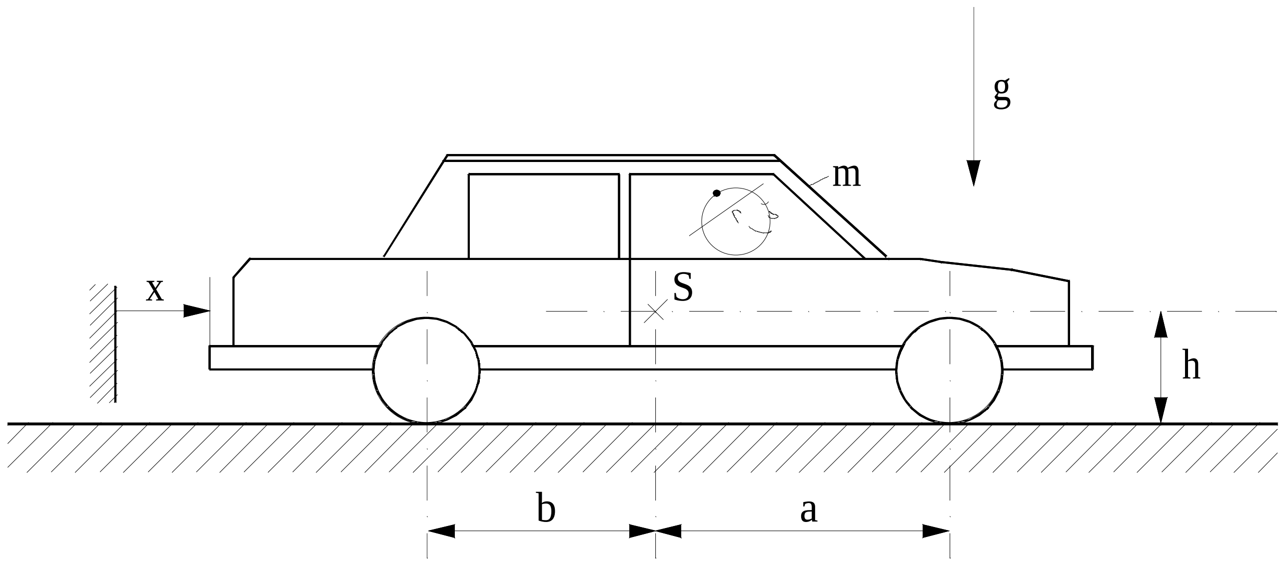
1. Mit dem Newtonschen Grundgesetz stelle man Bewegungs- und Zwangskraftgleichung des oberen Massenpunktes für den Fall auf, dass die untere Masse in Ruhe ist.

2. Man bestimme daraus die Stangenkraft S als Funktion von φ.

3. Wie groß muss der Haftreibungskoeffizient μ mindestens sein, wenn die untere Masse bis $\varphi_1 = 60°$ in Ruhe bleiben soll?

Aufgabe 2 – 11

— zu bearbeiten —



Ein Automobil mit der Masse m bewegt sich geradlinig mit der konstanten Geschwindigkeit v_0. Sein Schwerpunkt S befindet sich auf der Höhe h über der Bodenfläche. Die Abstände der Vorder- und Hinterachse des Autos von der Vertikalen, die durch den Schwerpunkt geht, sind a bzw. b.

1. Man bestimme die Belastung der Vorderachse N_1 und der Hinterachse N_2 bei Fahrt mit konstanter Geschwindigkeit.

2. Zur Zeit $t = 0$ blockieren durch zu starkes Bremsen alle 4 Räder gleichzeitig.

   a) Mit dem Prinzip von d'Alembert bestimme man die Bewegungsgleichung des Autos und durch Integration daraus den Bremsweg, wenn die Räder blockiert bleiben und der Luftwiderstand vernachlässigbar ist (Reibungskoeffizient zwischen Reifen und Bodenfläche ist μ).

   b) Wie groß sind die Achslasten N_1 und N_2 während des Bremsvorgangs?

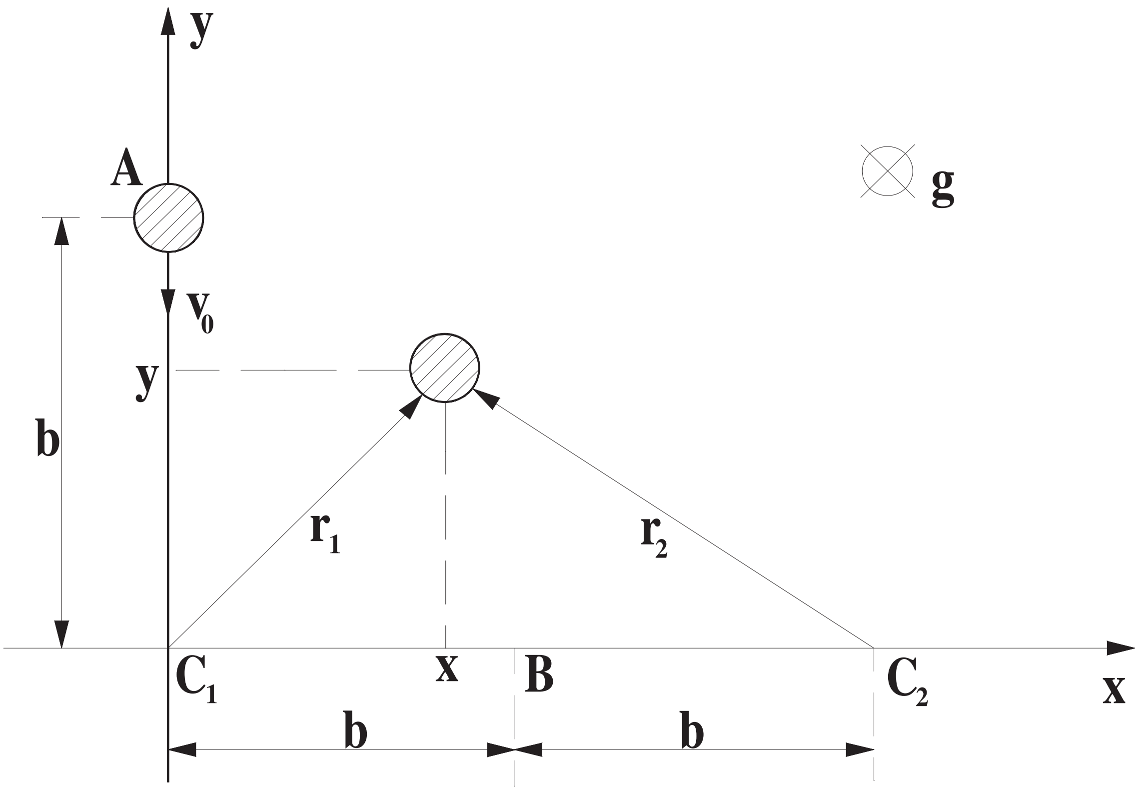
   c) Wie groß muss der Reibungskoeffizient mindestens sein, damit die Belastung der Vorderachse die der Hinterachse übersteigt?

Hinweis: Das Auto wird als Massenpunkt betrachtet, wobei die gesamte Masse im Schwerpunkt vereint sei.

Aufgabe 2 – 5

— freiwillig —

$x(t) = \frac{kb}{mv_0^2}(b - y(t))^2$, $v_0 = b\sqrt{\frac{k}{m}}$



Ein in der x-y-Ebene frei beweglicher Massenpunkt mit der Masse m befindet sich zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ in $A(0, b)$ und hat die Anfangsgeschwindigkeit $\underset{\sim}{v}_0 = (0, -v_0)$. In einer allgemeinen Lage wird er vom Punkt C_1 mit der Kraft $\underset{\sim}{F}_1 = k_1 \underset{\sim}{r}_1$ abgestoßen und vom Punkt C_2 mit $\underset{\sim}{F}_2 = -k_2 \underset{\sim}{r}_2$ angezogen.

1. Mittels des Newtonschen Grundgesetzes ermittle man die Bewegungsgleichungen des Punktes.

2. Für den Sonderfall $k_1 = k_2 = k$ ermittle man die Lösungen $x(t)$ und $y(t)$ der Bewegungsgleichungen. Durch Elimination des Zeitparameters ermittle man die Bahnkurve $x = f(y)$.

3. Wie muss v_0 gewählt werden, damit die Bahnkurve durch den Punkt $B(b, 0)$ verläuft und wie lautet dann die Gleichung der Bahnkurve?